***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**6 клас**

1. Серед наведених чисел виберіть найбільше та найменше

;;;…;.

Відповідь обґрунтуйте.

1. Поставте замість букв цифри так, щоб утворилась правильна числова рівність:

ПЛАН+ЗАВОД=БУДОВА

(однаковим буквам відповідають однакові цифри).

1. Скільки трицифрових чисел містить цифру три?
2. П'ять чоловіків А, В, С, Д, E одягнули капелюхи або білого або чорного кольору. Ніхто з них не знає капелюх якого кольору на ньому. Відомо, що чоловік, який одягнув чорний капелюх, завжди говорить правду, а чоловік, який одягнув білий капелюх, завжди говорить неправду. Четверо з них висловили наступні твердження:

А: Я бачу три чорних і один білий капелюх.

В: Я бачу чотири білих капелюхи.

С: Я бачу один чорний і три білих капелюхи.

Д: Я бачу чотири чорних капелюхи.

Визначте, капелюх якого кольору на кожному з чоловіків.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 3 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**7 клас**

1. У класі кількість відсутніх учнів становить 12,5% від кількості присутніх. Якщо з класу вийдуть ще 2 учнів, то відсутніми будуть 20% від кількості учнів, що залишилися в класі. Скільки учнів навчається в цьому класі ?
2. Розв’яжіть рівняння ⏐*x*–1⏐+*x*2+1=2*x*.
3. Знайдіть тризначне число  таке, що чотиризначні числа , задовольняють рівняння .
4. Всередині кута АОВ, який дорівнює 120° , проведено промені ОС і ОD так, що кожен з них є бісектрисою якогось із кутів, що утворилися при цьому. Знайдіть величину кута АОС. Укажіть всі можливі варіанти.
5. На дошці записано число 60. Сашко і Юрко грають у таку гру: кожен із двох хлопчиків по черзі за один хід зменшує утворене число на будь-який із його дільників. Програє той із гравців, хто першим отримає нуль. Гру розпочинає Юрко. Чи зможе Юрко забезпечити собі перемогу? Відповідь обґрунтуйте.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**8 клас**

1. Відомо, що число $\frac{a^{2}}{a-b}$ – ціле число, де *a* і *b* різні цілі числа. Доведіть, що число $\frac{b^{3}}{a-b}$ також ціле.
2. При яких значеннях змінних *x,y,z* виконується рівність **?
3. Відрізки AМ і BH відповідно медіана і висота гострокутного трикутника ABC. Відомо, що AH=1, а ∠MCA=2∠MAC. Знайдіть довжину сторони BC.
4. Чи може число, сума цифр якого дорівнює 123, бути квадратом цілого числа? Відповідь обґрунтуйте.
5. На колі дано 2024 точки, які є вершинами правильного 2024-кутника. Двоє друзів по черзі проводять по одній хорді цього кола з кінцями у зазначених точках, причому не дозволяється проводити хорду, яка перетинає хоча б одну з вже проведених хорд. Виграє той, хто останнім проводить хорду. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Відповідь обґрунтуйте.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**9 клас**

1. Доведіть, що число ціле.
2. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки рівностороннього трикутника до його сторін є сталою величиною.
3. Відомо, що 1<*x*<2 та 1<*y*<2. Доведіть, що виконується нерівність 2*xy*+5>3*x*+3*y*.
4. Розв’язати в простих числах рівняння $x^{y}+1=z$.
5. У деякій компанії 5 хлопчиків та 6 дівчаток. Чи може статися так, що всі дівчатка знайомі з різною кількістю хлопчиків, а всі хлопчики – з однаковою кількістю дівчаток?

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**10 клас**

1. Квадратний тричлен $x^{2}+px+q$ має корені $x\_{1}$ та $x\_{2}$. Чи може квадратний тричлен $2x^{2}+\left(p+1\right)x+q+1$ мати корені $x\_{1}+1, x\_{2}+1$? Відповідь обґрунтуйте.
2. Нехай $0<x,y,z,t<1 $такі, що $x+y+z+t=2. $Доведіть, що $\sqrt{\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(1-z\right)\left(1-t\right)}\leq \frac{xz+yt}{2}$ .
3. Доведіть, що не існує різних додатних чисел $a, b, c, d$ таких, що задовольняють систему $\left\{\begin{array}{c}a+b=c+d\\a^{3}+b^{3}=c^{3}+d^{3}\end{array}\right.$ .
4. У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору цієї точки. Знайти цю суму.
5. Відбувся волейбольний турнір в одне коло. Будемо говорити, що команда А сильніша за команду В, якщо А виграла від В або є така команда С, яка виграла від В і програла при цьому команді А. Доведіть, що команда, яка виграла турнір, сильніша від усіх інших команд.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

1. **клас**
2. Розв’яжіть рівняння 2023*x* = *y*2+*y*+4, де *x, y* ­– натуральні числа.
3. Доведіть нерівність

$a^{4}+b^{4}+c^{4}\geq abc(a+b+c)$,

1. Нехай $n=2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$, де $2^{p}-1$ – просте число. Довести, що сума всіх дільників числа *n* , відмінних від самого *n*, дорівнює *n*.
2. Довести, що площа опуклого чотирикутника не перевищує  де

 *а, b, c, d* – довжини послідовних сторін чотирикутника.

1. На колі розміщено 2*n* точок. За один хід гравцеві дозволяється з’єднати довільні дві точки відрізком, який не перетинає відрізки, проведені раніше. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Відповідь обґрунтуйте.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*