***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**6 клас**

1. Серед наведених чисел виберіть найбільше та найменше

;;;…;.

Відповідь обґрунтуйте.

**Вказівка:** Якщо кожне число зменшити на 1 то отримаємо:;;;…;. Очевидно, що вони впорядковані в порядку зростання. Тому серед цих чисел найбільше число , а найменше .

**Відповідь:**найбільше число, а найменше .

1. Поставте замість букв цифри так, щоб утворилась правильна числова рівність:

ПЛАН+ЗАВОД=БУДОВА

(однаковим буквам відповідають однакові цифри).

**Відповідь:** ПЛАН=6274, ЗАВОД=97583, БУДОВА=103857.

1. Скільки трицифрових чисел містить цифру три?

**Вказівка:** всіх трицифрових чисел 900, а всіх трицифрових чисел, які містять цифру 3 буде 8∙19+100=252.

**Відповідь:** 252.

1. П'ять чоловіків А, В, С, Д, E одягнули капелюхи або білого або чорного кольору. Ніхто з них не знає, капелюх якого кольору на ньому. Відомо, що чоловік, який одягнув чорний капелюх, завжди говорить правду, а чоловік, який одягнув білий капелюх, завжди говорить неправду. Четверо з них висловили наступні твердження:

А: Я бачу три чорних і один білий капелюх.

В: Я бачу чотири білих капелюхи.

С: Я бачу один чорний і три білих капелюхи.

Д: Я бачу чотири чорних капелюхи.

Визначте, капелюх якого кольору на кожному з чоловіків.

**Вказівка:** Якщо А говорить правду, то на ньому чорний капелюх, і в кімнаті є 4 чорних капелюхи. Але це суперечить твердженням В і С, які говорять, що на ньому білий капелюх. Отже, А говорить неправду, і на ньому білий капелюх.

Якщо В говорить правду, то на ньому чорний капелюх, і в кімнаті є 4 білих капелюхів і 1 чорний. Тому С сказав правду, що неможливо. Отже, В говорить неправду, і на ньому білий капелюх.

Якщо Д говорить правду, то на ньому чорний капелюх, і в кімнаті є 5 чорних капелюхи. Отже, всі мали сказати правду, що суперечить кожному з інших тверджень, тому Д говорить неправду і на ньому білий капелюх.

Якщо С сказав неправду, то всі мають білий капелюх. А тому В мав сказати правду, що неможливо. Тому С говорить правду, і на ньому чорний капелюх.

**Відповідь:** А – білий, В – білий, С – чорний, Д – білий, Е – чорний.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 3 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**7 клас**

1. У класі кількість відсутніх учнів становить 12,5% від кількості присутніх. Якщо з класу вийдуть ще 2 учнів, то відсутніми будуть 20% від кількості учнів, що залишилися в класі. Скільки учнів навчається в цьому класі ?

**Вказівка:**  нехай *х* учнів присутні.Тоді 0,125*х* учнів відсутні. Отже,складаємо рівняння: 0,125*х*+2=0,2(*х*–2). Тому *х*=32.

**Відповідь:** у класі навчається 36 учнів.

1. Розв’яжіть рівняння ⏐*x*–1⏐+*x*2+1=2*x*.

**Вказівка:** перепишемо рівняння у вигляді: ⏐*x*–1⏐+(*x*–1)2=0. Отримаємо суму невід’ємних чисел, яка дорівнює нулю. Це можливо, коли кожен доданок дорівнює нулю. Отже, *x*=1.

**Відповідь:** *x*=1.

1. Знайдіть тризначне число  таке, що чотиризначні числа , задовольняють рівняння .

**Вказівка:** оскільки , а , то дане в умові задачі рівняння буде мати вигляд , звідки .

**Відповідь:** 857.

1. Всередині кута АОВ, який дорівнює 120° , проведено промені ОС і ОD так, що кожен з них є бісектрисою якогось із кутів, що утворилися при цьому. Знайдіть величину кута АОС. Укажіть всі можливі варіанти.

**Вказівка:** кут АОС може бути рівним 90°,80°,60°,40°,30°.

1. На дошці записано число 60. Сашко і Юркограють у таку гру: коженіз двох хлопчиків по черзі за один хід зменшує утворене число на будь-який із його дільників. Програє той із гравців, хто першим отримає нуль. Гру розпочинає Юрко. Чи зможе Юркозабезпечити собі перемогу? Відповідь обґрунтуйте.

**Вказівка:** виграє перший гравець. Він зменшує утворене число на 1. Тому після ходів другого гравця утворюватимуться парні числа, а після ходів першого гравця непарні числа. Оскільки нуль парне число, то отримає його другий гравець.

**Відповідь:**так.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**8 клас**

1. Відомо, що число $\frac{a^{2}}{a-b}$ – ціле число, де*a* і *b* різні цілі числа. Доведіть, що число $\frac{b^{3}}{a-b}$ також ціле.

**Вказівка:**$\frac{b^{3}}{a-b}=\frac{b^{3}}{a-b}-\frac{a^{3}}{a-b}+\frac{a^{3}}{a-b}=\frac{b^{3}-a^{3}}{a-b}+\frac{a^{2}}{a-b}∙a=-b^{2}-ab-a^{2}+\frac{a^{2}}{a-b}∙a$ – ціле число.

**Відповідь:** доведено.

1. При яких значеннях змінних*x,y,z* виконується рівність**?

**Вказівка:** нехай **. Тоді

**⇒x=4t,y=3t,z=2t⇒ 24t3=6t⇒6t(2t–1)(2t+1)=0.

Тобто t=0 або t=0,5 або t=–0,5.

**Відповідь:** (0;0;0) (2;1,5;1) (–2; –1,5; –1).

1. Відрізки AМ і BH відповідно медіана і висота гострокутного трикутника ABC. Відомо, що AH=1, а ∠MCA=2∠MAC. Знайдіть довжину сторони BC.

**Вказівка:** відрізок HМ – медіана прямокутного трикутника BHC, а, отже, дорівнює половині гіпотенузи. Звідси HМ=ВМ=МС і відповідно трикутник HМC – рівнобедрений. Тоді ∠MСH=∠СHM. Так як ∠MHС – зовнішній кут трикутника АМH, то ∠MHС=∠HАM+∠HMА,а ∠MCA=2∠MAC, то трикутник АМH також рівнобедрений.Отже, АH=HМ=ВМ=МС. Звідси ВС=2АH=2.

**Відповідь:**ВС=2.

1. Чи може число, сума цифр якого дорівнює 123, бути квадратом цілого числа? Відповідь обґрунтуйте.

**Вказівка:** сума цифр шуканого числа дорівнює 123. Це число ділиться на 3, але не ділиться на 9. Це означає, що задане число не може бути квадратом цілого числа.

**Відповідь:** задане число не може бути квадратом цілого числа.

1. На колі дано 2024 точки, які є вершинами правильного 2024-кутника. Двоє друзів по черзі проводять по одній хорді цього кола з кінцями у зазначених точках, причому не дозволяється проводити хорду, яка перетинає хоча б одну з вже проведених хорд. Виграє той, хто останнім проводить хорду. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Відповідь обґрунтуйте.

**Вказівка:**  виграє перший гравець, якщо вінпершим ходом проведе діаметр кола, а далі повторюватиме ходи суперника симетрично відносно неї.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**9 клас**

1. Доведіть, що числоціле.

**Вказівка:**  позначимо 2023=х і розкладемо чисельник даного дробу на множники.

Тоді х4+х2+1=(х2+1)2–х2=(х2+1+х)( х2+1–х)=(20232+1+2023)( 20232+1–2023)=

=(20232+2024) (20232–2022). Отже, числоціле.

1. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки рівностороннього трикутника до його сторін є сталою величиною.

****

**Вказівка:**

Нехай *а* – сторона трикутника АВС, *x*, *y*, *z* – відстані від внутрішньої точки трикутникаD до його сторін, S – площа трикутника АВС (див. рисунок). Тоді і

 – стала величина.

**Відповідь:** доведено.

1. Відомо, що1<*x*<2 та 1<*y*<2. Доведіть, що виконується нерівність 2*xy*+5>3*x*+3*y*.

**Вказівка:**Так як 1<*x*<2, 1<*y*<2, то (*х*–1)(*у*–1)>0. Тоді*xy*+1>*x*+*y*. Аналогічно отримаємо, що (*х*–2)(*у*–2)>0. Тоді*xy*+4>2*x*+2*y*. Додавши ці дві нерівності отримаємо 2*xy*+5>3*x*+3*y.*

**Відповідь:** доведено.

1. Розв’язати в простих числах рівняння $x^{y}+1=z$.

**Вказівка:** За умовою числа $x\geq 2$, $y\geq 2$, тому $x^{y}\geq 4$ i $z\geq 5$. Значить$z$ – непарне просте число, а $x$ – парне просте число. Тому $x=2$. Якщо $y\geq 3$, то $y$ – непарне просте число і $\left(2^{y}+1\right)\vdots 3$ і $z$ – не просте число. Значить $y=2$ і $z=5$.

**Відповідь:**$\left(2;2;5\right)$.

1. У деякій компанії 5 хлопчиків та 6 дівчаток. Чи може статися так, що всі дівчатка знайомі з різною кількістю хлопчиків, а всі хлопчики – з однаковою кількістю дівчаток?

**Вказівка:**Так, може. Наприклад. Розіб’ємодівчаток на три пари. Нехай перша дівчинка першої пари знайома з усіма п’ятьма хлопчиками, а друга дівчинка цієї пари не знайома з жодним хлопчиком.Перша дівчинка другої пари знайомаз чотирма хлопчиками, а друга дівчинка цієї пари знайома з п’ятим хлопчиком. Перша дівчинка третьої пари знайомаз трьома хлопчиками, а друга дівчинка цієї пари знайома з двома іншими хлопчиками.

**Відповідь:**так.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

**10 клас**

1. Квадратний тричлен$x^{2}+px+q$має корені $x\_{1}$ та $x\_{2}$. Чи може квадратний тричлен$2x^{2}+\left(p+1\right)x+q+1$мати корені $x\_{1}+1, x\_{2}+1$? Відповідь обґрунтуйте.

**Вказівка:** припустимо, що це можливо. Тоді за теоремою Вієта$x\_{1}+x\_{2}=-p$і$x\_{1}x\_{2}=q$та$x\_{1}+1+x\_{2}+1=-\frac{p+1}{2}$і$\left(x\_{1}+1\right)\left(x\_{2}+1\right)=-\frac{q+1}{2}$**.** Звідси отримуємо, що $p=5,q=9 $. Квадратний тричлен $x^{2}+5x+9$ коренів не має. Отримали протиріччя.

**Відповідь:**не може.

1. Нехай $0<x,y,z,t<1 $такі, що $x+y+z+t=2. $Доведіть, що$\sqrt{\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(1-z\right)\left(1-t\right)}\leq \frac{xz+yt}{2}$ .

**Вказівка:** Скористаємось нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним

$\sqrt{\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(1-z\right)\left(1-t\right)}\leq \frac{\left(1-x\right)\left(1-z\right)+\left(1-y\right)\left(1-t\right)}{2}$.

Замітимо, що для чисельника з умови$x+y+z+t=2 $має місце рівність

$2-x-y-z-t+xz+yt=xz+yt $, звідки отримуємо шукану нерівність.

**Відповідь:**доведено.

1. Доведіть, що не існує різних додатних чисел $a, b, c, d$ таких, що задовольняють систему$\left\{\begin{array}{c}a+b=c+d\\a^{3}+b^{3}=c^{3}+d^{3}\end{array}\right.$ .

**Вказівка:**

****

Тому$\left(a-b\right)^{2}=\left(c-d\right)^{2}$, $\left\{\begin{array}{c}a+b=c+d\\a-b=\pm \left(c-d\right)\end{array}\right.$. Отримаємо, що $a=c$або$a=d$.

Це протирічить умові, що всі числа *a, b, c, d*–різні. Тому різних додатних чисел*a, b, c, d,* які задовольняють систему, не існує.

**Відповідь:**доведено.

1. У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору цієї точки. Знайти цю суму.

**Вказівка:** Нехай О – центр кола і квадрата, М – довільна точка кола, *а* – сторона квадрата. Тоді 2МО=*а*, МО – медіана в трикутниках АМС і ВМD,, . Рівності мають місце і в тому випадку,коли М належить АС або ВD.Додавши ці рівності, отримаємо, що

.

**Відповідь**:.

1. Відбувся волейбольний турнір в одне коло. Будемо говорити, що команда А сильніша за команду В, якщо А виграла від В або є така команда С, яка виграла від В і програла при цьому команді А. Доведіть, що команда, яка виграла турнір, сильніша від усіх інших команд.

**Вказівка:** нехай команда А – виграла турнір, В – довільна команда. Якщо команда А виграла від команди В, то вона сильніша від В. Якщо команда А програла команді В, то всі команди, в яких виграла А не можуть програти В, бо тоді В виграла б більше ігор, ніж А. Отже, серед команд, які програли А є команда С, яка виграла від В. Тобто, команда А сильніша від команди В.

**Відповідь:** доведено.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*

***ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік***

1. **клас**
2. Розв’яжіть рівняння2023*x* = *y*2+*y*+4, де *x, y*­– натуральні числа.

**Вказівка:**

Оскільки *y2*+*y=у(у*+1*)* – парне число, то задане рівняння не має розв’язків.

**Відповідь:**не має розв’язків.

1. Доведіть нерівність

$a^{4}+b^{4}+c^{4}\geq abc(a+b+c)$,

**Вказівка:**потрібно скористатися двічі нерівністю трьох квадратів:

$x^{2}+y^{2}+z^{2}\geq xy+xz+yz$.

Тоді $a^{4}+b^{4}+c^{4}\geq a^{2}b^{2}+a^{2}c^{2}+b^{2}c^{2}\geq ab∙ac+ab∙bc+ac∙bc\geq abc(a+b+c)$.

 **Відповідь:** доведено.

1. Нехай $n=2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$, де $2^{p}-1$–просте число. Довести, що сума всіх дільників числа *n*, відмінних від самого *n*, дорівнює *n*.

**Вказівка:**випишемо всі дільники числа $n=2^{p-1}q$ (де $q=2^{p}-1$–просте число), які менші від нього самого:

$1, 2, 2^{2}, …, 2^{p-2}, 2^{p-1}$,

$$q, 2q, 2^{2}q, …, 2^{p-2}q$$

Числа першого рядка і числа другого рядка утворюють геометричну прогресію. Знаходимо суми цих прогресій:

$2^{p}-1=q$ і $q\left(2^{p-1}-1\right)=n-q$

Отже, сума всіх дільників числа *n*, відмінних від самого *n*, дорівнює *n*.

**Відповідь:**доведено.

1. Довести, що площа опуклого чотирикутника не перевищуєде

*а, b, c, d* – довжини послідовних сторін чотирикутника.

**Вказівка:**Нехай S– площа опуклого чотирикутника. Тоді

$S=\frac{1}{2}absinα+\frac{1}{2}cdsinβ\leq \frac{1}{2}\left(ab+cd\right)$, де $α$– кут між сторонами *а*і *b*, $β$– кут між сторонами *с* і *d*

$S=\frac{1}{2}bcsinγ+\frac{1}{2}adsinδ\leq \frac{1}{2}\left(bc+ad\right)$, де $γ$– кут між сторонами*b*і*c*, $δ$– кут між сторонами*a*і *d*

Тому 

**Відповідь:**доведено.

1. На колі розміщено2*n* точок. За один хід гравцеві дозволяється з’єднати довільні дві точки відрізком, який не перетинає відрізки, проведені раніше. Програє той, хто не може зробитичерговий хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Відповідь обґрунтуйте.

**Вказівка:**  виграє перший гравець. Першим ходом він сполучить дві точки кола А і В відрізком так, щоб у різних півплощинах була однакова кількість точок по $\left(n-2\right):2$. Далі перший гравець повторюватиме ходи другого гравця симетрично відносно відрізка АВ.

**Відповідь:**виграє перший гравець.

*Кожне завдання оцінюється 7-ма балами м.Ужгород*

*Час розв’язання 4 год.*

*Користування калькуляторами заборонено*