II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

6 клас

1. У кімнаті, що має прямокутну форму, розставити 14 стільців так, щоб вздовж кожної стінки стояла однакова кількість стільців.

Відповідь: вказана на рисунку

2. При додаванні трьох чисел цифри замінили літерами (однакові цифри — однаковими літерами) та одержали результат:

	К	Н	И	Г	А
	К	Н	И	Г	А
+	К	Н	И	Г	А
	Н	А	У	К	А

Відновити цифри, які замінено літерами.

Відповідь: вказана нижче

	2	8	3	7	5
	2	8	3	7	5
+	2	8	3	7	5
	8	5	1	2	5

3. У книзі 400 сторінок. З’ясуйте, скільки разів при нумерації сторінок зустрічається цифра 9? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 80 разів.

Вказівка: зауважимо, що кількості цифр 9, що зустрічаються при нумерації сторінок 1-100; 101-200; 201-300; 301-400 є рівними.

Порахуємо кількість цифр 9, що зустрічаються при нумерації сторінок 1-100. Цифра 9 зустрічається по одному разу в номерах 9+10k, к=0, 1, ... 8; 90-98 і два рази в номері 99, тобто 9+9+2=20 разів.

Тому всього при нумерації книги було використано 80 цифр 9.

4. Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 2, 3, 5,11 і 13 дає в остачі 1.

Відповідь: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 + 1.$

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

7 клас

1. Дано відрізки довжиною 10, 20, 30 і 40 см. Скільки з них можна скласти різних рівнобедрених трикутників?

Відповідь: 12.

2. При множенні двох чисел деякі цифри замінили * («зірочками») та одержали результат:

			*	*	*
		×	*	*	*
		7	*	*	*
		*	*	*	
*	*	*	*		
*	*	*	7	7	7

Відновити цифри, які замінено зірочками.

Відповідь: вказана нижче

			7	8	3
		×	3	1	9
		7	0	4	7
		7	8	3	
2	3	4	9		
2	4	9	7	7	7

3. У листопаді Денис кожного дня купував собі від однієї до трьох новорічних іграшок. Першого грудня він спробував усі куплені іграшки розставити в прямокутник. Коли він розставив їх у ряди по 7 іграшок у кожному ряді, то виявились 6 зайвих іграшок. Коли розставив у ряди по 10

іграшок, то зайвими лишилися 3 іграшки. З'ясуйте, чи зможе Денис розставити їх у ряди по 4 іграшки? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: ні.

Вказівка: треба знайти число між 30 та 90 (бо у листопаді 30 днів, а хлопчик купував не менше однієї і не більше трьох іграшок в день), яке закінчується на цифру 3 та при діленні на 7 дає остачу 6. Простою перевіркою переконуємося, що таке число 83 (33=7*4+5, 43=7*6+1, 53=7*7+4, 63=7*9, 73=7*10+3, 83=7*11+6). Число 83 не кратне 4, тому іграшки в ряди по 4 розставити не можна.

4. На дошці записані числа 1, 2, 3, …, 2022. Оленка підкреслила усі числа, які діляться на 2, потім – усі числа, які діляться на 3, і, нарешті, – усі числа, які діляться на 5. З'ясуйте, скільки чисел Оленка підкреслила двічі? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 472 числа.

Вказівка: Оленка двічі підкреслила числа, які діляться на 6, на 10 та на 15, але не діляться на 30. Серед кожних 30 послідовних натуральних чисел, підкреслених двічі, будуть 7 чисел, які при діленні на 30 дають остачі 6, 10,12, 15, 18, 20 та 24. Від 1 до 2010 таких груп по 30 чисел є 67. Крім них, двічі будуть підкреслені ще й числа 2016, 2020 та 2022. Разом отримаємо: $7 \cdot 67 + 3 = 472$.

5. Серед учнів 7 класу, що цікавляться математикою 20% тих, які цікавляться ще й хімією, а 25% учнів, які цікавляться хімією, цікавляться також і математикою. І тільки двом учням не цікавий жоден із цих предметів. Скільки учнів у 7 класі, коли відомо, що їх більше 20, але менше 30?

Відповідь: 29.

Вказівка: позначимо кількість прихильників математики через m, а хімії – через x. З умови слідує, що $m:5=x:4$. Так як m та x – натуральні числа, то можливі тільки такі випадки:

$m = 5; 10; 15; 25,$

$x = 4; 8; 12;16; 20; 24; 28.$

Простим перебором значень m пересвідчуємося, що $m=15$ та $x=12$ (менші значення m не задовольняють умову, що кількість учнів класу більше 20). Тоді у класі 15+12+2=29 учнів.

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

8 клас

1. Ненульові числа a, b задовольняють умови:

$$6a + 6b = \frac{25}{a} + \frac{25}{b} = 25.$$

Знайдіть значення виразу $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$.

Відповідь: $\frac{13}{6}$.

Вказівка: з умови задачі отримуємо, що $6(a+b) = \frac{25(a+b)}{ab} = 25$. Так як $a + b = \frac{25}{6}$, то $ab = \frac{25}{6}$. Враховуючи, що $a + b = ab$, отримаємо: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} = (a+b) - 2 = \frac{25}{6} - 2 = \frac{13}{6}$.

2. Скільки розв'язків залежно від значення параметра a має рівняння:

$$|x+5| + |x-3| = a.$$

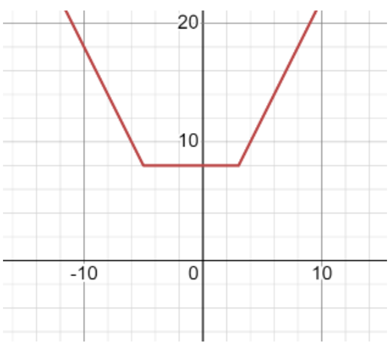
Відповідь:

при $a > 8$ – два розв'язки;

при $a = 8$ – безліч розв'язків;

при $a < 8$ – немає розв'язків.

Вказівка: побудуємо графік функції $y = |x+5| + |x-3|$.



Корені рівняння – абсциси точок перетину графіка даної функції з горизонтальними прямими у = a. Тому

при a > 8 – два розв’язки;

при a = 8 – безліч розв’язків;

при a < 8 – немає розв’язків.

3. На нараду в олімпійський комітет для обговорення питань олімпіад запросили 30 спортсменів з футболу, баскетболу, волейболу та тенісу. Серед запрошених баскетболістів та тенісистів разом виявилось удвічі менше, ніж футболістів, а баскетболістів і волейболістів разом удвічі більше, ніж тенісистів. З’ясуйте, скільки на зустріч запросили футболістів, якщо спортсменів із кожного виду спорту була різна кількість? Відповідь обгрунтуйте.

Відповідь: 18.

Вказівка: позначимо кількість футболістів, баскетболістів, волейболістів та тенісистів відповідно через f, b, v, t. Тоді за умовою:

$$\begin{cases} f+b+v+t=30, \\ b+t=\dfrac{1}{2}f, \\ b+v=2t. \end{cases}$$

З третього та другого рівняння отримаємо: $f=2b+2t, v=2t-b$.

Підставимо у перше рівняння: $2b+5t=30$. Оскільки f, b, v, t – цілі невід'ємні числа, то зрозуміло, що t повинно бути парним числом від 0 до 6. Розглянемо всі можливі випадки:

$$t=0\to b=15\to f=30\to v=-15,$$

$$t=2\to b=10\to f=24\to v=-6,$$

$$t=4\to b=5\to f=18\to v=3,$$

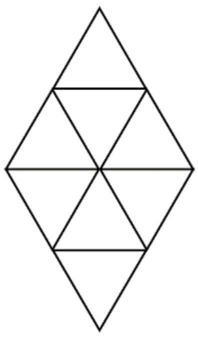
$$t=6\to b=0\to f=12\to v=12,$$

Умову задачі задовольняє тільки варіант, де $f=18$.

4. Заданий ромб, у якого всі сторони та одна з діагоналей рівні 10 см. Усередині або на сторонах цього ромба вибирають довільним чином 9 точок. Доведіть, що принаймні дві з них знаходяться на відстані не більшій від 5 см.

Відповідь: твердження вірне.

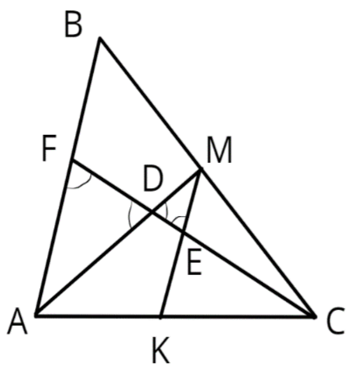
Вказівка: розіб'ємо цей ромб спочатку на два правильних трикутники (див. рис.). А тепер кожний з них розіб'ємо на 4 рівних рівносторонні трикутники зі стороною 5 см. Усього маємо 8 трикутників, а точок 9, то за принципом Діріхле принаймні дві з них попадуть у один трикутник. Але найбільша відстань між точками в цьому трикутнику не перевищує 5 см, що й треба було довести.



5. На стороні AB трикутника ABC задано точку F. Відрізок CF перетинає медіану AM трикутника в точці D, причому AF = AD .Знайти відношення BF : DM.

Відповідь: BF : DM = 2 : 1.

Вказівка: Проведемо відрізок MK, де K – середина сторони AC. Тоді MK – середня лінія трикутника ABC і $AB \parallel MK$. За теоремою Фалеса FE = EC, де E – точка перетину відрізків FC та MK. Тому ME – середня лінія трикутника FBC і BF : EM = 2 : 1. Покажемо, що ME = DM. Трикутники AFD та MED подібні, бо у них $\angle FDA = \angle EDM$ як вертикальні, $\angle AFD =$



$\angle MED$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB та MK і січній FC. За умовою задачі AF = AD. Тому $\angle ADF = \angle AFD$. Отже, $\angle DME = \angle MED$. Значить, ME = DM, що і потрібно було довести.

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

9 клас

1. Обчисліть значення виразу:

$$\sqrt{2022+2\sqrt{2021}}-\sqrt{2022-2\sqrt{2021}}.$$

Відповідь: 2.

Вказівка: замітимо, що

$2022+2\sqrt{2021}=(\sqrt{2021}+1)^2$ і $2022-2\sqrt{2021}=(\sqrt{2021}-1)^2$.

Тоді

$\sqrt{2022+2\sqrt{2021}}-\sqrt{2022-2\sqrt{2021}}=\sqrt{(\sqrt{2021}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2021}-1)^2}=\sqrt{2021}+1-\left(\sqrt{2021}-1\right)=2.$

2. Спростіть вираз:

$$a^3+b^3+3(a^3b+ab^3)+6(a^3b^2+a^2b^3),$$

де a i $b-$ корені рівняння $x^2-x+q=0$.

Відповідь: 1.

Вказівка: перетворимо $a^3+b^3+3(a^3b+ab^3)+6(a^3b^2+a^2b^3)=a^3+b^3+3ab(a^2+b^2)+6a^2b^2(a+b)$ (*).

За теоремою Вієта із рівняння $x^2-x+q=0$ отримаємо, що $\begin{cases} a+b=1, \\ a\cdot b=q. \end{cases}$

Перетворимо:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2q;$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=1^3-3q\cdot 1=1-3q;$$

Підставимо у (*):

$$a^3 + b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2(a + b) = 1 - 3q + 3q(1 - 2q) + 6q^2 \cdot 1$$
$$= 1 - 3q + 3q - 6q^2 + 6q^2 = 1.$$

3. Є дві посудини ємністю 1 л кожна. Одна з них наповнена соком, а інша – порожня. Сік послідовно переливають з першої посудини в другу, з другої – у першу, з першої – знову в другу і т. д., причому частка соку, що відливається, становить відповідно 1/2, 1/3, 1/4 і т. д. від кількості соку в посудині, з якої він відливається. Скільки соку буде у кожній із посудин після 125 переливань?

Відповідь: по 0,5 л соку.

Вказівка: після переливання з непарним номером в посудинах буде по 0,5 л соку.

Доведемо індукцією по кількості переливань.

Нехай після (2k – 1)-го переливання буде по 0,5 л, тоді після 2k-го переливання: 0,5+ 0,5/(2k+1) = (k+1)/(2k+1). Після (2k + 1)-го переливання: (k + 1)/(2k +1) – (k + 1)/(2k + 1) • 1/(2k + 2) = 1/2.

4. Знайдіть всі тризначні числа $\overline{abc}$, квадрати яких закінчуються на $\overline{abc}$.

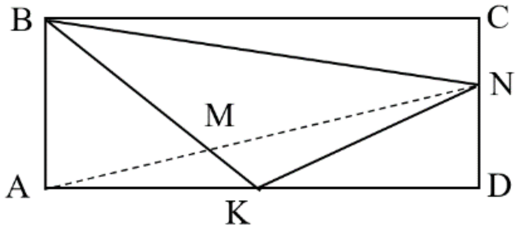
Відповідь: 376 і 625.

Вказівка: нехай А – шукане число. Так як $A^2 - A = A(A - 1)$ ділиться на 1000=8*125, А і А – 1 взаємно прості, то або А ділиться на 8 і А – 1 на 125, або, навпаки. Далі із 7 можливих випадків вибираємо відповідь.

5. Дано прямокутник ABCD. Точка K лежить на стороні AD, точка N лежить на стороні CD. Доведіть, що площа трикутника BNK не більша за половину площі прямокутника ABCD.

Відповідь: твердження вірне.

Вказівка: проведемо відрізок AN. Позначимо через M точку перетину BK та AN (див. рис.). Тоді



$$s_{\Delta BNK} = s_{\Delta BNM} + s_{\Delta MNK}.$$

Відмітимо, що

$$s_{\Delta ABN} = \frac{1}{2} s_{\text{ABCD}}$$

$(s_{\Delta ABN} = \frac{1}{2} AB \cdot AD,\ s_{\text{ABCD}} = AB \cdot AD)$.

Покажемо, що $s_{\Delta BNK} \leq s_{\Delta ABN}$ (*).

Має місце рівність $s_{\Delta ABN} = s_{\Delta \text{BNM}} + s_{\Delta ABM}$. Щоб довести нерівність (*), достатньо показати, що $s_{\Delta MNK} \leq s_{\Delta ABM}$. Розглянемо трикутники ABK та ANK. У них спільна сторона AK, відповідна висота трикутника ABK дорівнює AB і, очевидно ($N \in CD$), більша або рівна висоті ND трикутника ANK, опущеної на сторону AK. Тому $s_{\Delta ANK} \leq s_{\Delta ABK}$. Але $s_{\Delta ANK} = s_{\Delta MNK} + s_{\Delta AMK}, s_{\Delta ABK} = s_{\Delta ABM} + s_{\Delta AMK}$. Підставимо у останню нерівність: $s_{\Delta MNK} + s_{\Delta AMK} \leq s_{\Delta ABM} + s_{\Delta AMK}$. Віднявши від обох частин $s_{\Delta AMK}$, отримаємо нерівність $s_{\Delta MNK} \leq s_{\Delta ABM}$. А, отже, $s_{\Delta BNK} \leq s_{\Delta ABN} = \frac{1}{2} s_{\text{ABCD}}$, що і потрібно було довести.

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

10 клас

1. Обчисліть: $\sqrt{1+2021\sqrt{1+2022\sqrt{1+2023\cdot 2025}}}$.

Відповідь: 2022.

Вказівка: використаємо рівність $1+(n-1)(n+1)=n^2$. Тоді $\sqrt{1+2021\sqrt{1+2022\sqrt{1+2023\cdot 2025}}}=\sqrt{1+2021\sqrt{1+2022\cdot 2024}}=\sqrt{1+2021\cdot 2023}=2022$.

2. Побудувати геометричне місце точок площини, що задовольняють задану нерівність:

$$|y-2022|\le\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}\right)^{2022}.$$

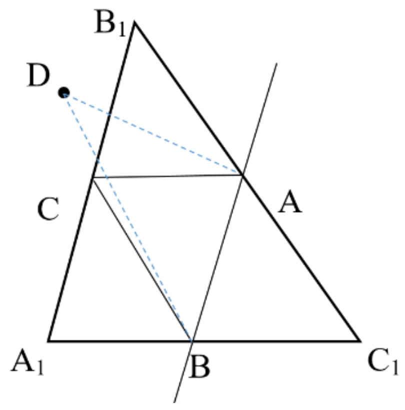
Відповідь: це точки (–1; 2022), (1; 2022).

Вказівка: знайдемо ОДЗ нерівності: $\begin{cases} x^2-1\ge 0, \\ 1-x^2\ge 0. \end{cases}$ Звідси $x=\pm 1$. Тому дана нерівність рівносильна нерівності $|y-2022|\le 0$ при $x=\pm 1$. Отже, $y=2022$. Тому геометричне місце точок складається лише з двох точок: (–1; 2022), (1; 2022).

3. На площині розташовані 2022 точки так, що кожні три з них утворюють трикутник з площею, що не перевищує 1. З'ясуйте, чи можна всі ці точки покрити трикутником з площею 4? Відповідь обгрунтуйте.

Відповідь: так.

Вказівка: серед утворених трикутників з вершинами в заданих точках розглянемо трикутник найбільшої площі. Якщо таких декілька, то розглянемо будь-який з них.



Нехай це трикутник ABC. Розглянемо трикутник $A_1B_1C_1$, для якого сторони трикутника ABC є середніми лініями. Тоді площа трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 4, при цьому жодна точка не може лежати поза трикутником $A_1B_1C_1$.

Дійсно, якщо точка D лежить поза трикутником $A_1B_1C_1$ (див. рис.), наприклад, не потрапляє в смугу між паралельними прямими AB та A_1B_1, то $S_{\Delta ADB} > S_{\Delta ABC}$. А це суперечить тому, що трикутник ABC був трикутником найбільшої площі.

4. Знайдіть всі прості числа p такі, що число $p^2 + 11$ має рівно 6 різних дільників (у тому числі одиницю і саме число).

Відповідь: $p = 3$.

Вказівка: покажемо, що $p = 3$. Помітимо, що

$$p^2 + 11 = p^2 - 1 + 12 = (p - 1)(p + 1) + 12.$$

Якщо $p \geq 5$ просте число, то числа $p - 1$ і $p + 1$ обидва є парними, а також одне з них кратне трьом. Тому добуток $(p - 1)(p + 1)$ ділиться на 12, значить, і $p^2 + 11$ також ділиться на 12. Тоді воно має не менше 7 дільників (6 дільників числа 12 і саме число, $p^2 + 11 > 12$). Залишилось перевірити випадки $p = 2 \ i \ p = 3$.

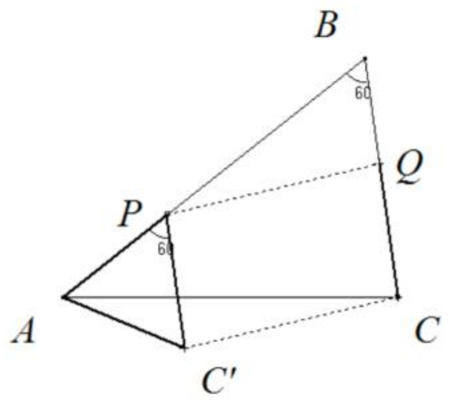
При $p = 2$ одержимо $p^2 + 11 = 4 + 11 = 15$, дільники 1, 3, 5, 15 – їх менше 6.

При $p = 3$ одержимо $p^2 + 11 = 9 + 11 = 20$, дільники 1, 2, 4, 5, 10, 20 – їх рівно 6.

5. У трикутнику ABC кут B дорівнює 60°. Точки P та Q лежать на сторонах трикутника AB та BC відповідно, причому AP=CQ та AP+PQ=AC. Доведіть, що трикутник ABC є рівностороннім.

Відповідь: трикутник ABC рівносторонній.

Вказівка: побудуємо відрізок PC', рівний і паралельний відрізку QC.



Тоді C'PQC – паралелограм. З паралельності випливає, що ∠APC'=∠ABC=60° та AP=CQ=C'P. Отже, трикутник APC' – рівнобедрений, звідки AC' = AP. Але тоді AC=AP+PQ=AC'+C'C≥AC за нерівністю трикутника. Отже, в силу рівності лівої та правої частин отриманої нерівності точка C' лежить між A і C. Тоді ∠BAC=∠PAC'=60°. Тому трикутник ABC – рівносторонній.

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

11 клас

1. Доведіть, що число $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$ є цілим.

Відповідь: твердження вірне.

Вказівка: зробимо ряд перетворень.

$35-8\sqrt{19}=(\sqrt{19}-4)^2$.

Тому $\sqrt{35-8\sqrt{19}}=\sqrt{(\sqrt{19}-4)^2}=\sqrt{19}-4$.

Тоді $\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}=\sqrt{3-8(\sqrt{19}-4)}=\sqrt{35-8\sqrt{19}}$=$\sqrt{19}-4$.

Остаточно отримуємо $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{19}+4}=\sqrt{4}=2$. Число 2 є цілим, що і потрібно було довести.

2. Розв'яжіть рівняння:

$$2022^x-2021^x=1.$$

Відповідь: x=1.

Вказівка: поділимо ліву і праву частину на 2021^x:

$$\left(\frac{2022}{2021}\right)^x-1=\left(\frac{1}{2021}\right)^x.$$

Функція зліва – зростаюча, а справа – спадна. Тому рівняння може мати тільки один корінь. Легко перевірити, що x=1.

3. Скількома способами на шахівницю $n \times n$, $n \geq 3$, із якої вирізані дві протилежні по діагоналі кутові клітинки 1×1, можна виставити n тур, жодні дві з яких не атакують одна одну?

Тура – це шахова фігура, яка атакує всі поля як по горизонталі, так і по вертикалі відносно поля, у якому вона розташована.

Відповідь: $(n-2)! \cdot (n^2 - 3n + 3)$ способами.

Вказівка: без обмеження загальності, вважаємо, що вирізана ліва нижня клітинка A та права верхня – B. Спочатку з'ясуємо, скількома способами тури таким чином можна розставити на шахівниці $n \times n$. Таких варіантів n!, оскільки для тури у першій вертикалі є n варіантів, для тури у другому стовпчику вже лишається n–1 варіант і так далі. Розглянемо розстановки тур, при яких одна з тур займає поле A. Таких розстановок (n–1)!. Аналогічно (n–1)! варіантів розстановок, при яких одна з тур стоїть в позиції B. У виразі $n! - 2(n-1)!$ двічі відкинуті ті позиції, в яких дві тури займають одночасно позиції A та B . Таких позицій усього (n–2)!. Таким чином, шукана кількість варіантів дорівнює

$$n! - 2(n-1)! + (n-2)! = (n-2)! \cdot (n(n-1) - 2(n-1) + 1)$$
$$= (n-2)! \cdot (n^2 - 3n + 3).$$

4. У змаганні з бігу беруть участь 100 учнів. Відомо, що серед будь-яких 12 із них знайдуться двоє, які навчаються в одному класі. Доведіть, що незалежно від того, як роздали учням стартові номери (не обов'язково від 1 до 100, а у довільному порядку в межах від 1 до 100), знайдуться два учні з одного класу, номери яких починаються з однієї і тієї ж цифри.

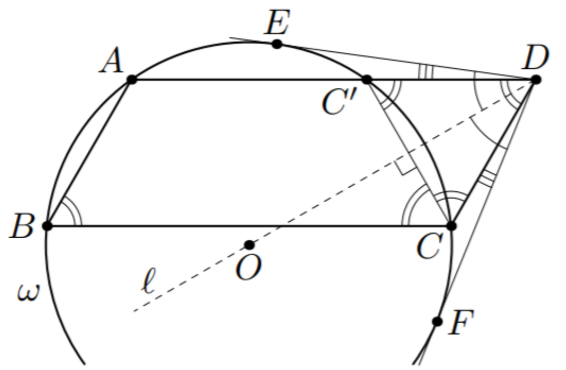
Відповідь: твердження вірне.

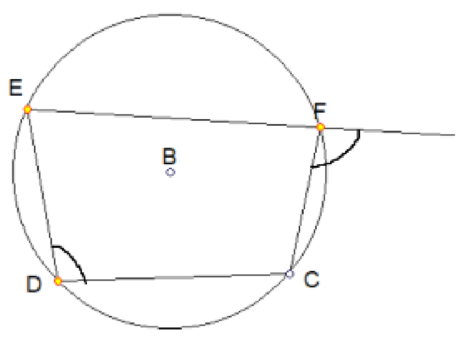
Вказівка: позначимо через $N_i, i = 1, 2, \ldots, 9$ кількість номерів, що починаються з цифри i. Досить довести, що за деякого k виконується нерівність $N_k > 11$. Припустимо, що це не вірно, тобто $N_k \leq 11$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, 9$. Тоді сума $N_1 + \cdots + N_9$ не перевищує 99, що суперечить умові, так як загальна кількість номерів дорівнює кількості учнів, тобто дорівнює 100.

5. У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $\angle B < 90°$ і $AB < BC$. Точки E і F лежать на описаному навколо трикутника ABC колі ω. Дотичні до ω в цих точках проходять через D, при цьому $\angle EDA = \angle FDC$. Знайдіть кут ABC.

Відповідь: 60°.

Вказівка: нехай l – бісектриса кута EDF. Оскільки DE і DF – дотичні до ω, пряма l проходить через центр O кола ω. Виконаємо симетрію відносно l. Так як $\angle EDA = \angle FDC$, то промінь DC перейде в промінь DA. Оскільки l проходить через O, то коло ω перейде в себе; а значить точка C переходить у точку C', яка лежить на DA і на ω. При цьому, так як $AD \neq DC$, точки C' і A – різні (див. рис.). Аналогічно з симетрії одержимо, що $\angle DCC' = \angle DC'C$. Так як точки A, B, C і C' лежать на колі ω, маємо $\angle DC'C = \angle ABC = \angle ADC$. Таким чином, всі три кути трикутника DCC' рівні, звідки отримаємо, що $\angle ABC = \angle CDC' = 60°$.





Примітка. У задачі використано відомий факт, що кути, які позначені на малюнку – рівні.